II/ RAPPEL SUR LE CALCUL VECTORIEL
تـــذكـــيـــر بـــالـــحـــســـاب الـــشـــعـــاعـــي

1/ GRANDEUR SCALAIRE(المقدار السلمي)

Une grandeur scalaire est toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante.

Exemple : le volume, la masse, la température, la charge électrique, l'énergie…

2/ GRANDEUR VECTORIELLE(المقدار الشعاعي)

On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module.

Exemple : le déplacement, la vitesse, la force, le champ électrique…

3/ REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UN VECTEUR (التمثيل البياني لشعاع) :

Un vecteur est représenté par un segment orienté (figure2.1).

$\vec{V}$: représente le vecteur (avec ses quatre caractéristiques).

$\left\|\vec{V}\right\| = \left|\vec{V}\right| = V$: représente le module ou l'intensité du vecteur.

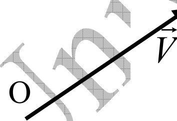


Fig 2.1: représentation d'un vecteur

4/ LE VECTEUR UNITAIRE (شعاع الواحدة): c'est un vecteur de module égal à l'unité (le nombre un).

On peut exprimer un vecteur parallèle au vecteur unitaire sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{u}V = V\vec{u} \qquad \textbf{(2.1)}$$

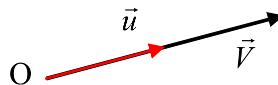


Fig 2.2: vecteur unitaire

5/LA SOMME GEOMETRIQUE DES VECTEURS (الجمع الهندسي للأشعة) :

Cette opération fait appel au dessin, c'est pour cette raison qu'on la qualifie de géométrique.

- **La somme de deux vecteurs** : c'est une opération commutative.

On calcule le module du vecteur résultant à partir de la **loi des cosinus (قانون جيوب التمام)** que nous démontrerons plus tard :

$$\boxed{D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

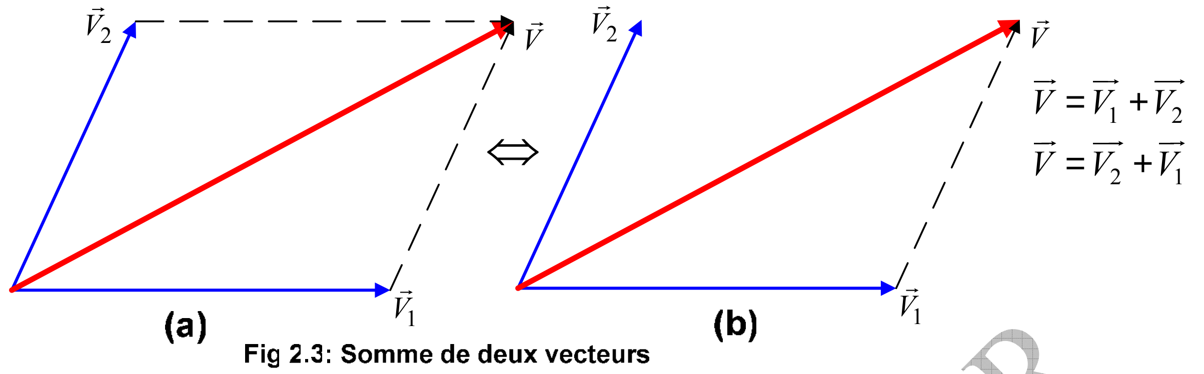


Fig 2.3: Somme de deux vecteurs

Pour déterminer la direction de $\vec{V}$, il suffit de chercher la valeur de l'angle α (figure 2.4). Raisonnons à partir du triangle **ACD** de la figure 2.5 **:**

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{CD}{V} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{CD}{BC} = \dfrac{CD}{V_2} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_2}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V.\sin\alpha = V_2.\sin\theta} \qquad \textbf{(2.3)}$$

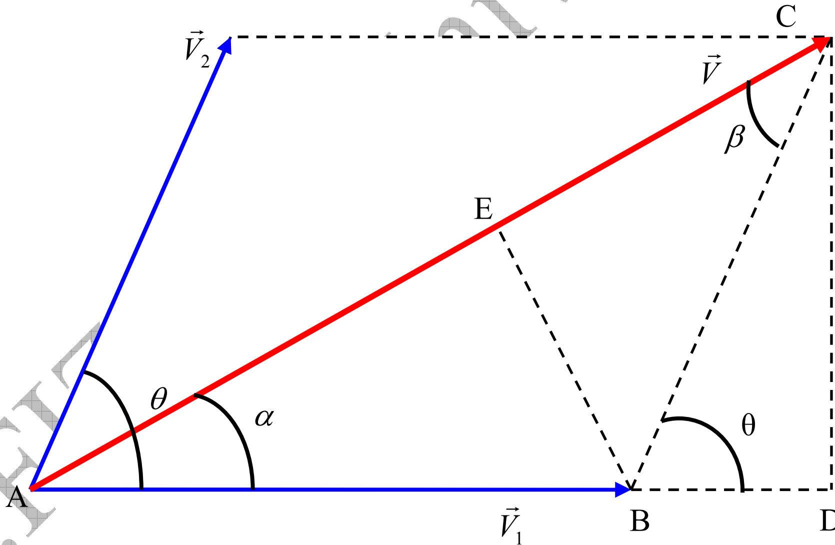


Fig 2.4: relative à la démonstration de la loi des sinus

De même dans le triangle **BEC** nous avons :

$$\left.\begin{array}{l} \sin\beta = \dfrac{BE}{BC} \\ \\ \sin\alpha = \dfrac{BE}{AB} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{V_2}{sin\alpha} = \frac{V_1}{sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2.\sin\beta = V_1.\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.4)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

De (2.3) et (2.4) nous pouvons en déduire la formule générale (2.5), appelée loi des sinus (قانون الجيوب):

$$\frac{V}{\sin\theta} = \frac{V_1}{\sin\beta} = \frac{V_2}{\sin\alpha} \qquad \textbf{(2.5)}$$

- **Cas particulier :** Si $\theta = \pi/2$ alors $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ et $\tan\alpha = \dfrac{V_2}{V_1}$
- **La somme géométrique de plusieurs vecteurs :** (voir figure2.5)

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_4 + \vec{V}_5$$

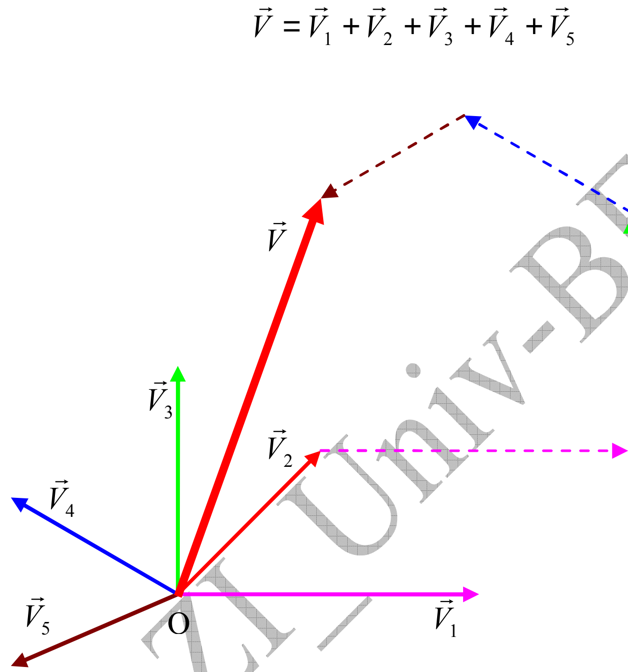


Fig 2.5: Somme de plusieurs vecteurs

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

- **La soustraction de deux vecteurs :** (طرح شعاعين) figure 2.6

Géométriquement, le vecteur $\vec{D}$ représente le résultat de la soustraction entre les deux vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_1$. Nous pouvons écrire : $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

Cette équation peut aussi s'écrire : $\vec{D} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$

La soustraction de vecteurs est anticommutative, c'est ce qui ressort de la figure 2.6 : $\vec{D}\,' = -\vec{D}$

- Le module du vecteur $\vec{D}$:

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \qquad \textbf{(2.6)}$$

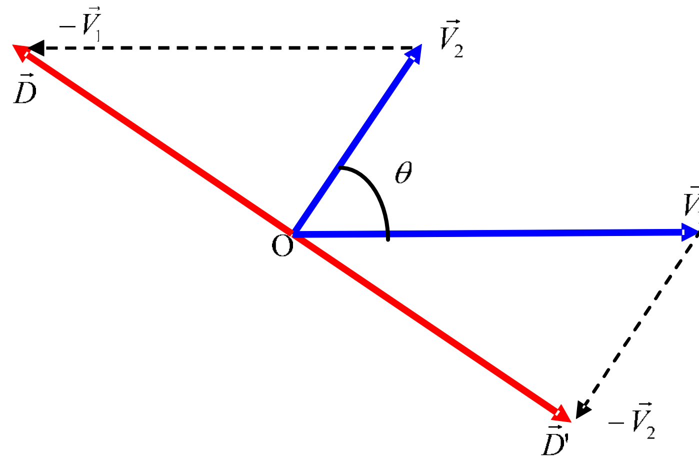


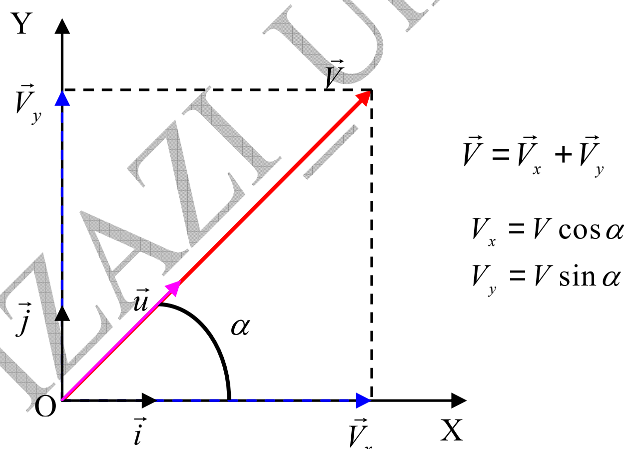
Fig 2.6: Différence de deux vecteurs

6/ COMPOSANTES D'UN VECTEUR (مركبات شعاع) :

Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de deux vecteurs ou plus (le nombre de possibilités est illimité).

Dans le plan, soit le repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j})$:

- **En coordonnées rectangulaires** : on décompose le vecteur $\vec{V}$ suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la figure2.7.



$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$V_x = V\cos\alpha$$

$$V_y = V\sin\alpha$$

Fig 2.7: Composantes d'un vecteur

En désignant les deux vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$, respectivement dans les directions des deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_x = \vec{i}.V_x \quad , \quad \vec{V}_y = \vec{j}.V_y \quad ;$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y \; ; \qquad \textbf{(2.7)}$$

$$\vec{V} = \vec{i}.V\cos\alpha + \vec{j}.V\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{V} = V(\vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha)}$$

Or $\vec{V} = \vec{u}.V$, d'où :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$\boxed{\vec{u} = \vec{i}.\cos\alpha + \vec{j}.\sin\alpha} \quad \textbf{(2.8)}$$

Quant à la norme du vecteur $\vec{V}$, elle vaut : $V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}}$

En utilisant les coordonnées x et y nous pouvons aussi écrire : $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple 2.1 : Trouver la résultante des deux vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Réponse :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 + x_2) + \vec{j}(y_1 + y_2) \longrightarrow \boxed{V = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}}$$

Exemple 2.2 : Trouver la différence des deux vecteurs $\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Réponse :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 \quad ; \quad \vec{V} = \vec{i}(x_1 - x_2) + \vec{j}(y_1 - y_2) \Rightarrow \boxed{V = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$$

- **Dans l'espace :** dans le repère R $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ (base orthonormée), nous remarquons que $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \Rightarrow \vec{V} = \vec{i}.V_x + \vec{j}.V_y + \vec{k}.V_z$. (figure 2.8)

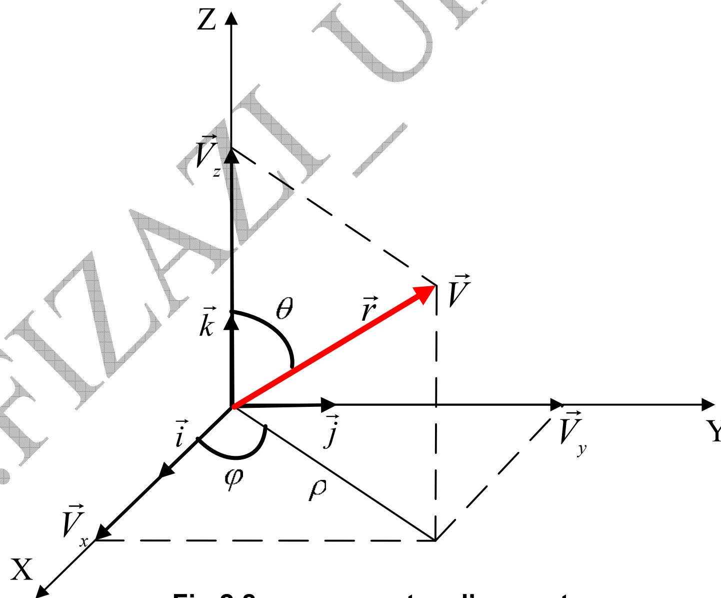


Fig 2.8: composantes d'un vecteur

Nous pouvons nous assurer géométriquement que :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$\cos\theta = \frac{V_z}{r} \quad \Rightarrow \quad V_z = r.\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{\rho}{r} \quad \Rightarrow \rho = r.\sin\theta;$$

$$\cos\varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho.\cos\varphi \Rightarrow V_x = r.\sin\theta.\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho.\sin\varphi \Rightarrow V_y = r\sin\theta.\sin\varphi$$

En résumé :

$$\boxed{\begin{array}{l} V_x = V\sin\theta.\cos\varphi \\ V_y = V.\sin\theta.\sin\varphi \\ V_z = V.\cos\theta \end{array}} \qquad \textbf{(2.9)}$$

Quant au module du vecteur $\vec{V}$ il est égal à : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

Ou en coordonnées cartésiennes : $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

❖ **Remarque** : En notant par α et β les angles respectifs formés par le vecteur $\vec{V}$ avec les axes OX et OY, et de la même façon que nous avons obtenu l'équation 2.9, il vient :

$$\boxed{V_x = V.\cos\alpha \quad , \quad V_y = V.\cos\beta \quad , \quad V_z = V.\cos\theta} \qquad \textbf{(2.10)}$$

Nous pouvons en déduire l'expression :

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1} \qquad \textbf{(2.11)}$$

Exemple 2.3 : Trouver la distance qui sépare les deux points $A(10,-4,4)u$ et $B(10,6,8)u$, représentés dans le repère rectangulaire $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, avec $u = unité$.

Réponse :

En représentant les deux points dans le repère, on se rend compte que la distance demandée n'est autre que le module du vecteur $\vec{D}$, qui est la différence entre les deux vecteurs : $\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

Soit :

$$\vec{D} = \vec{i}(x_2 - x_1) + \vec{j}(y_2 - y_1) + \vec{k}(z_2 - z_1) \Rightarrow \vec{D} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{D} = \vec{i}(0) + \vec{j}(10) + \vec{k}(4) \Rightarrow D = \sqrt{116} = 10.77u$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Exemple 2.4 : Trouver la résultante des cinq vecteurs suivants :

$$\vec{V}_1 = (4\vec{i} - 3\vec{j})\ u ; \vec{V}_2 = (-3\vec{i} + 2\vec{j})\ u ; \vec{V}_3 = (2\vec{i} - 6\vec{j})u ; \vec{V}_4 = (7\vec{i} - 8\vec{j})u ; \vec{V}_5 = (9\vec{i} + \vec{j})u$$

Réponse :

$$\vec{V} = (4-3+2+7+9)\vec{i} + (-3+2-6-8+1)\vec{j} \Rightarrow V = 19\vec{i} - 14\vec{j} \Rightarrow V = \sqrt{361+196} = 23.60u$$

Pour trouver la direction du vecteur $\vec{V}$, nous partons de l'expression $\tan\alpha = \frac{V_y}{V_x}$, α est l'angle formé par le vecteur $\vec{V}$ et l'axe OX :

$$\tan\alpha = -14/19 \approx 0,737 \Rightarrow \alpha \approx 36,38°$$

7/ LE PRODUIT SCALAIRE (الجداء السلمي) :

- **Définition :** On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le nombre réel

$\vec{V}_1.\vec{V}_2$: $$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = V_1.V_2.\cos(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \quad \textbf{(2.12)}$$

Ou $$\vec{V}_1.\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\left[\left\|\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right\|^2 - \left\|\vec{V}_1\right\|^2 - \left\|\vec{V}_2\right\|^2\right] \quad \textbf{(2.13)}$$

- **Cas particulier :**

Si $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$, alors $\vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$

Si $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ et $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, alors :

$$\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V}_2 = 0$$

$$\vec{V}_1 /\!/ \vec{V}_2 \Rightarrow (\vec{V}_1, \vec{V}_2) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{V}_1.\vec{V} = V_1 V_2$$

Exemple:

Le travail de la force $\vec{F}$ qui provoque un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est donné par la formule $W = F.AB.\cos\alpha$ tel que $\alpha = (\vec{F};\overrightarrow{AB})$ (on lit W est le produit scalaire de $\vec{F}$ par $\overrightarrow{AB}$), on écrit :

$$\vec{W} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad W = F.AB.\cos\alpha$$

Démontrons à présent la relation (2.2) comme nous l'avons promise :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \ ; \ \vec{V}^2 = \vec{V}_1^{\,2} + \vec{V}_2^{\,2} + 2\vec{V}_1\vec{V}_2 \ ; \ \vec{V}_1^{\,2} = \vec{V}_1.\vec{V}_1 = V_1 V_1 \cos(\vec{V}_1\vec{V}_1) = V_1^2 ;$$

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2) \Rightarrow V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)}$$

- **Expression analytique du produit scalaire** (العبارة التحليلية للجداء السلمي)

Dans le plan(في المستوى) **:** Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ contenus dans le plan, tel que :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} ; \ \mathrm{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

Dans le repère $\Re(O\,;\vec{i},\vec{j})$

$$\vec{V}_1.\vec{V}_2=\left(x_1.\vec{i}+y_1.\vec{j}\right).(x_2.\vec{i}+y_2.\vec{j})=x_1.x_2.\vec{i}.\vec{i}+x_1.y_2.\vec{i}.\vec{j}+x_2.y_1.\vec{j}.\vec{i}+y_1.y_2.\vec{j}.\vec{j}$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\perp\vec{j}\Rightarrow\vec{j}.\vec{i}=\vec{i}.\vec{j}=0\\ \vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{i}^{\,2}=\vec{j}^{\,2}=1\end{array}\right|\Rightarrow\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2=x_1.x_2+y_1.y_2.}\qquad\textbf{(2.14)}$$

<u>Dans l'espace</u> (في الفضاء) :

Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le repère $\Re\,(O\,;\vec{i},\vec{j};\vec{k})$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{i}.\vec{j}=\vec{i}.\vec{k}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{0}\\ \vec{i}=\vec{j}=\vec{k}=1\end{array}}\ \text{هام}\quad \vec{V}_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}\ ;\ \vec{V}_2\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\vec{V}_1.\vec{V}_2=x_1.x_2+y_1.y_2+z_1.z_2}\qquad\textbf{(2.15)}$$

❖ **<u>Propriétés du produit scalaire</u> (خصائص الجداء السلمي) :**

<u>Commutatif</u> (تبديلي) $\vec{V}_1.\vec{V}_2=\vec{V}_2.\vec{V}_1$

<u>Non associatif</u> (غير تجميعي): $\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2.\vec{V}_3\right)$ n'existe pas car le résultat serait un vecteur.

<u>Distributif (توزيعي) par rapport à la somme vectorielle :</u>

$$\vec{V}_1.\left(\vec{V}_2+\vec{V}_3\right)=\vec{V}_1.\vec{V}_2+\vec{V}_1.\vec{V}_3$$

❖ **<u>Exemple 2.5</u> :** Calculer l'angle compris entre les deux vecteurs : $\vec{V}_1=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ et $\vec{V}_2=-\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$.

<u>Réponse</u> :

Partant de l'expression du produit scalaire, on peut écrire :

$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)=\frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}$$

Donc :

$$\vec{V}_1.\vec{V}_1=-3+4-3=-2\ ;\ V_1=\sqrt{9+4+1}=3{,}74\ ;\ V_2=\sqrt{1+4+9}=3{,}74$$

$$\cos(\vec{V}_1\vec{V}_2)=\frac{\vec{V}_1.\vec{V}_1}{V_1V_2}=\frac{-2}{14}=-0{,}143\Rightarrow\theta=(\vec{V}_1\vec{V}_2)=96{,}2°$$

8/ <u>LE PRODUIT VECTORIEL</u> (الجداء الشعاعي) :

❖ **<u>Définition</u> :** On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ le vecteur $\vec{W}$ perpendiculaire au plan qu'ils constituent.

Nous écrivons par convention : $\vec{W}=\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=\vec{V}_1\times\vec{V}_2$

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

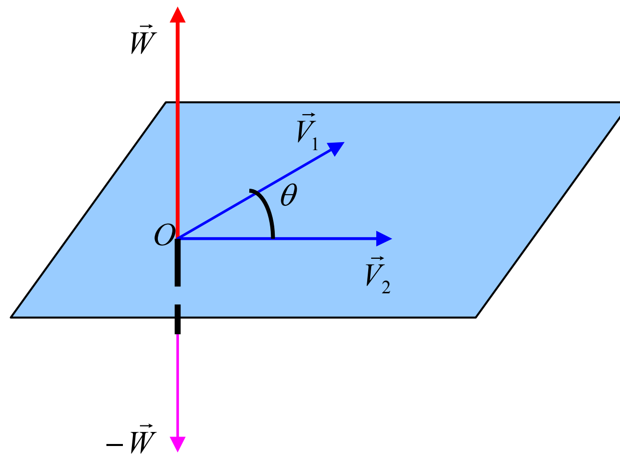


Fig 2.9: produit vectoriel

❖ **caractéristiques du vecteur** $\vec{W}$ (مميزات الشعاع)

$\vec{W}$ est **perpendiculaire** au plan formé par les deux vecteurs, son sens est déterminé par la règle de la main droite (l'index indiquant $\vec{W}$), son module est donné par la formule 2.16 :

$$W = |\vec{W}| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1.\vec{V}_2) \quad \textbf{(2.16)}$$

Important :

$$\begin{array}{l} \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}\ ;\ \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j}\ ;\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ |\vec{i} \wedge \vec{j}| = |\vec{i} \wedge \vec{k}| = |\vec{j} \wedge \vec{k}| = 1 \end{array}$$

Remarque : la grandeur $W = |\vec{W}| = V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1;\vec{V}_2)$ représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ce qui laisse sous entendre la possibilité de lier un vecteur à une certaine surface.

Méthode utilisée pour calculer le produit vectoriel de deux vecteurs :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} ;\ \vec{V}_2\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

En utilisant les coordonnées cartésiennes dans le repère $\Re(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on peut écrire :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\,\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\,\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\,\vec{k}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

A.FIZAZI Univ-BECHAR

$$W=\sqrt{(y_1z_2-y_2z_1)^2+(x_1z_2-x_2z_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}=V_1.V_2.\sin(\vec{V}_1,\vec{V}_2) \qquad \textbf{(2.17)}$$

➢ **Propriétés du produit vectoriel** (خصائص الجداء الشعاعي)

Anticommutatif (تبديلي مضاد) $\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2=-\vec{V}_2\wedge\vec{V}_1$

Non associatif (غير تجميعي): $\vec{V}_1\wedge(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3)\neq(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)\wedge\vec{V}_3$

Distributif (توزيعي) **par rapport à la somme vectorielle :**

$$\vec{V}_1\wedge(\vec{V}_2+\vec{V}_3)=(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_2)+(\vec{V}_1\wedge\vec{V}_3)$$

❖ **Exemple 2.6 :** Calculer le vecteur $\vec{W}$, produit des deux vecteurs : $\vec{V}_1=(2,1,-1)$ et $\vec{V}_2=(1,0,-2)$, en déduire l'angle θ compris entre eux.

Réponse :

$$\vec{W}=[(1\times-2)-(0\times-1)].\vec{i}-[(2\times-2)-(1\times-1)].\vec{j}+[(2\times0)-(1\times1)].\vec{k}\Rightarrow\vec{W}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

$$V_1=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$V_2=\sqrt{1^2+0+2^2}=\sqrt{5}$$

$$W=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}=3,74$$

$$W=V_1.V_2.\sin\theta=3,74\Rightarrow\sin\theta=\frac{W}{V_1.V_2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{3,74}{\sqrt{30}}=0,683\Rightarrow\theta=43,06°$$

9/ LE PRODUIT MIXTE (الجداء المختلط):

Le produit mixte de trois vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}_1.(\vec{V}_2\wedge\vec{V}_3)=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=(y_2z_3-y_3z_2)x_1-(x_2z_3-x_3z_2)y_1+(x_2y_3-x_3y_2)z_1 \qquad \textbf{(2.18)}$$

10/ MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN POINT DE L'ESPACE

(عزم شعاع بالنسبة لنقطة من الفضاء)

❖ **Définition :** Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est le vecteur défini par :

$$\vec{\tau}_O=\overrightarrow{OA}\wedge\vec{V} \qquad \textbf{(2.19)}$$

❖ **Remarque :**

$\|\vec{\tau}_O\|=$ au double de l'aire du triangle AOB. (Figure2.10-a-)

11/ MOMENT D'UN VECTEUR PAR RAPPORT A UN AXE

(عزم شعاع بالنسبة لمحور)

❖ **Première définition :** Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection de ce vecteur par rapport à un point quelconque de cet axe.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

❖ **Deuxième définition :** Le moment du vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe Δ, d'origine O et de vecteur unitaire $\vec{u}$, est égal au produit mixte :

$$\tau_{\Delta} = \overrightarrow{\tau_O}.\vec{u} = \left(\overrightarrow{OA} \wedge \vec{V}\right).\vec{u} \qquad \textbf{(2.20)}$$

❖ **Remarque :** Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est une grandeur scalaire, par contre le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est un vecteur (Figure2.10-b-)

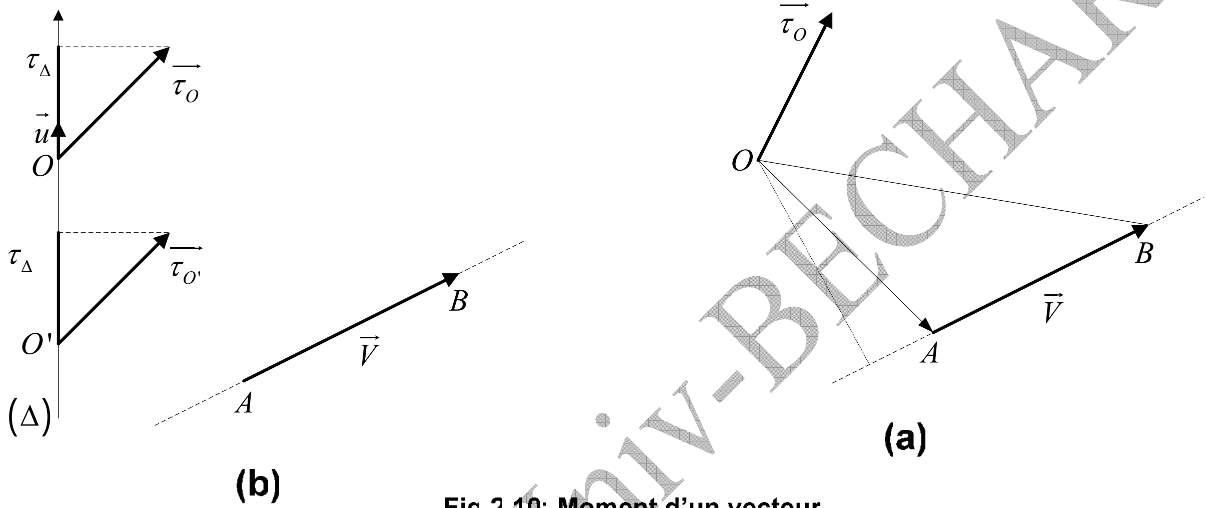


Fig 2.10: Moment d'un vecteur

12/GRADIENT, DIVERGENCE ET ROTATIONNEL (التدرج، التباعد و الدوران) :

❖ **Définitions :**

- On dit que la fonction $f(x,y,z)$ est un champ scalaire si la fonction $f(x,y,z)$ est un scalaire.
- On dit que la fonction $\vec{V}(x,y,z)$ est un champ vectoriel si la fonction est vectorielle.
- On définit l'opérateur **(المؤثر)** différentiel vectoriel $\vec{\nabla}(nabla)$ par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad \textbf{(2.21)}$$

Où :

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x, y et z.

Nous allons définir le gradient, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

A.FIZAZI Univ-BECHAR

- **LE GRADIENT (التدرج):**

Si $f(x,y,z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} \qquad \textbf{(2.22)}$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = f = 3x^2y^3z$.

Réponse : $\overrightarrow{grad} f = 6xy^3z.\vec{i} + 9x^2y^2z.\vec{j} + 3x^2y^3.\vec{k}$

- **LA DIVERGENCE (التباعد):**

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire défini comme étant :

$$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \qquad \textbf{(2.23)}$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer la divergence de la fonction vectorielle

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

Réponse : $div\vec{V} = 2y - 3z^2 + 0 = 2y - 3z^2$

- **LE ROTATIONNEL (الدوران):**

Si $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ est une fonction vectorielle, son rotationnel est un vecteur défini comme étant :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right).\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right).\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right).\vec{k} \qquad \textbf{(2.24)}$$

Démarche à suivre :

a/ Etablir la matrice suivante :

$$\overrightarrow{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = A + B + C$$

b/ Pour calculer A, B, C il suffit de se rappeler de la règle du produit vectoriel :

A.FIZAZI_Univ-BECHAR

$$A=\begin{vmatrix} +\vec{i} & & \\ & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)$$

$$B=\begin{vmatrix} & -\vec{j} & \\ \frac{\partial}{\partial x} & & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & & V_z \end{vmatrix} = -\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

$$C=\begin{vmatrix} & & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \\ V_x & V_y & \end{vmatrix} = +\vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

c/ On arrive à l'expression finale (2.24) :

$$\begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = +\vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right) -\vec{j}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right) +\vec{k}\left(\frac{\partial V_z}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)$$

❖ **Exemple 2.7 :** Calculer le rotationnel du vecteur :

$$\vec{V}(x,y,z)=2xy\vec{i}-3yz^2\vec{j}+9xy^3\vec{k}$$

Réponse :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\left(27xy^2-6yz\right).\vec{i}-(9y^3-0).\vec{j}+(0-2x).\vec{k}$$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\left(27xy^2-6yz\right).\vec{i}-9y^3\vec{j}-2x\vec{k}$$

13/ LE LAPLACIEN (الابلاسيان) :

❖ **Définitions :**

- **En coordonnées cartésiennes :**
  - ➢ Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(f\right)=\vec{\nabla}^2(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad \textbf{(2.25)}$$

A.FIZAZI Univ-BECHAR

➢ Le Laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

$$\overrightarrow{\nabla}.\nabla\left(\vec{V}\right) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 \overrightarrow{V_x}}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\vec{k} \qquad \textbf{(2.26)}$$

REMARQUE

Vous trouverez, à la fin de ce document en annexe, un formulaire regroupant le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien dans les différentes coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques.

A.FIZAZI_Univ-BECHAR